Correction SIGMA n° 3A.

Exercice 1

① (a) $(A-\lambda I)X = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} X$

$$= \begin{pmatrix} (5-\lambda)x - y - z \\ 2x + (2-\lambda)y - z \\ 2x - y + (2-\lambda)z \end{pmatrix}$$

D'où le système $\begin{cases} (5-\lambda)x - y - z = 0 \\ 2x + (2-\lambda)y - z = 0 \\ 2x - y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$

(b) Le système précédent est équivalent à $\begin{cases} 2x - y + (2-\lambda)z = 0 \\ 2x + (2-\lambda)y - z = 0 \\ (5-\lambda)x - y - z = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + (2-\lambda)z = 0 \\ (3-\lambda)y + (-3+\lambda)z = 0 \\ (5-\lambda)x - y - z = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + (2-\lambda)z = 0 \\ (3-\lambda)y - (3-\lambda)z = 0 \\ (3-\lambda)y + (3-\lambda)(\lambda-4)z = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - (5-\lambda)L_1$$

$$-2-(5-\lambda)(2-\lambda) = -2-(10-7\lambda+\lambda^2)$$
$$= -12+7\lambda-\lambda^2$$
$$= -(\lambda-3)(\lambda-4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + (2-\lambda)z = 0 \\ (3-\lambda)y - (3-\lambda)z = 0 \\ (3-\lambda)(\lambda-4+1)z = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + (2-\lambda)z = 0 \\ (3-\lambda)y - (3-\lambda)z = 0 \\ (3-\lambda)(\lambda-3)z = 0 \end{cases}$$

Le système est de cramer sauf pour $\boxed{\lambda = 3}$

(c) On peut calculer l'inverse de A pour montrer que la matrice est inversible ou ?

Le système $AX=0$ est un système de Cramer (question précédente pour $\lambda=0$). Donc la matrice A est inversible.

(d) Supposons qu'il existe une matrice P telle que

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \lambda I$

On a alors

$$A = P \times (\lambda I) \times P^{-1}$$
$$A = \lambda P \times I \times P^{-1}$$
$$A = \lambda PP^{-1}$$
$$A = \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ceci est absurde car A n'est pas diagonale.

2 (a) $B = A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{B^2 = 0}$

(b) D'un autre côté $A = B + 3I$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $A^n = (B + 3I)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (3I)^{n-k} \quad \text{car } B \text{ et } I \text{ commutent}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \times 3^{n-k}$$
$$= 3^n I + n 3^{n-1} B + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2 + \dots}_{=0}$$

car $B^2 = 0$

Donc $\boxed{A^n = 3^n I + n 3^{n-1} B}$

Exercice 2

1 (a) $x \longmapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0;+\infty[$

$x \longmapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0;+\infty[$.

Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

· $\boxed{f'(x) = \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}}$

· $f''(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = \dfrac{1+x+1}{(1+x)^2} = \boxed{\dfrac{2+x}{(1+x)^2}}$

(b) $\forall x \in [0;+\infty[$, $2+x \geq 0$

D'où le tableau de variation suivant:

x	0		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$+$	
variations de f'	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe de f'		$+$	
variation de f	0	$\nearrow$	$+\infty$

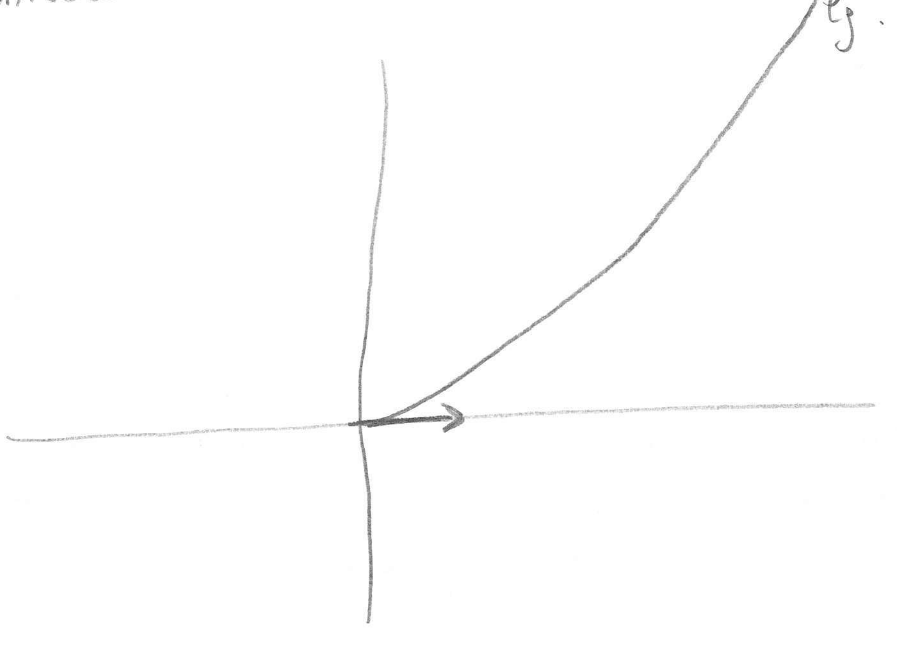
$\lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1+x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1+x} = 1$,

(c) $f'(0) = 0$ donc la courbe admet une demi tangente horizontale



② $f(x) = x \iff x\ln(1+x) = x$

$\iff x(\ln(1+x) - 1) = 0$

$\iff x = 0$ ou $\ln(1+x) = 1$.

$\iff \boxed{x = 0 \quad \text{ou} \quad x = e-1}$

$\boxed{\mathcal{S} = \{0 ; e-1\}}$

③ (a) On montre par récurrence $P_n : \{e-1 < u_n\}$

Initialisation $u_0 \in]e-1 ; +\infty[$ donc $u_0 > e-1$

P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose que P_n est vraie pour un certain rang n.

donc $u_n > e-1$

$f(u_n) > f(e-1)$ (on rappelle que f est croissante)

$u_{n+1} > e-1$

P_{n+1} est vraie

Conclusion : (P_n) est héréditaire.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > e-1$.

De plus $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n \ln(1+u_n)}{u_n} = \ln(1+u_n)$

($u_n > e-1$ donc $u_n \neq 0$) Or $u_n > e-1$

$1 + u_n > e$

$\ln(1+u_n) \geqslant 1$.

On a donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \iff u_{n+1} \geqslant u_n$.

et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{e-1 < u_n \leq u_{n+1}}$

(b) Supposons que (u_n) tende vers une limite finie ℓ en $+\infty$.

On a alors $f(\ell) = \ell$ et donc $\ell = 0$ ou $\ell = e-1$

Mais $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > e-1$ et (u_n) est croissante.

donc il est absurde de dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e-1$

(4) $u_0 \in]0; e-1[$

- On montre par récurrence que $P_n : \{u_n \in]0; e-1[\}$

Initialisation : $u_0 \in]0; e-1[$ vérifié.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour un certain rang n

On a donc $0 < u_n < e-1$

$\Rightarrow f(0) < f(u_n) < f(e-1)$

$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < e-1$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : (P_n) est héréditaire

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; e-1[$

- De la même façon, on montre que (u_n) est décroissante

Ainsi, (u_n) est croissante et majorée. Donc elle est convergente.

La limite est alors donnée par l'équation

$$f(\ell) = \ell.$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = e-1 \quad (\text{question } 2)$$

Enfin $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite est toujours inférieur à e-1

et donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

Exercice 3 - Partie 1

① On note A : " l'objet provient de la chaine A "
D : " L'objet est défectueux "

On cherche alors $P_D(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(D)}{P(D)}$ (Formule de Bayes)

Il nous manque $P(D)$.

D'après la formule des probabilités totales, (A, B) formant un système complet d'événements

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D)$$
$$= 0,6 \times 0,1 + 0,4 \times 0,2$$
$$= 0,06 + 0,08$$

$$\boxed{P(D) = 0,14}$$

On a alors $\boxed{P_D(A) = \dfrac{0,6 \times 0,1}{0,14} = \dfrac{0,06}{0,14} = \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7}}$

② (a) Loi de Y : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boxed{P(Y=k) = e^{-20} \times \dfrac{20^k}{k!}}$

Espérance $\boxed{E(Y) = 20}$ Variance $\boxed{V(Y) = 20}$

(b) 1er cas : $k > n$

Il ne peut pas y avoir plus d'objets défectueux que d'objets fabriqués donc

$$\boxed{P_{(Y=n)}(X=k) = 0}$$

2ème cas $k \leq n$

Si n objets sortent de la chaine A, chacun a 10% de chances d'être défectueux. Sachant $Y=n$, X suit une loi binomiale de paramètre n et $0,1$.

Ainsi

$$\boxed{P_{(Y=n)}(X=k) = \binom{n}{k} 0,1^k \; 0,9^{n-k}}$$

(c) La formule des probabilités totale pour le système complet d'évènement $(Y=n)_{\in \mathbb{N}}$ s'écrit

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n)\, P_{(Y=n)}(X=k)$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-20} \frac{20^n}{n!} \binom{n}{k} 0{,}1^k \times 0{,}9^{n-k}$$

car $P_{(Y=n)}(X=k) = 0$ si $k \leq n$.

Donc $P(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-20} \frac{20^n}{n!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{10}\right)^k \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}$

$$= e^{-20} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{2^n}{k!(n-k)!} \times 9^{n-k}$$

En passant par les sommes partielles

$$\sum_{n=k}^{N} \frac{2^n}{k!(n-k)!} 9^{n-k} = \sum_{m=0}^{N-k} \frac{2^{m+k} \times 9^m}{k!\, m!} \qquad m = n-k$$

$$= \frac{2^k}{k!} \sum_{m=0}^{N-k} \frac{18^m}{m!} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{2^k}{k!} e^{18}$$

On a alors $P(X=k) = e^{-20} \times \frac{2^k}{k!} e^{18}$

$$\boxed{P(X=k) = e^{-2} \frac{2^k}{k!}}$$

Donc X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Exercice 3 - Partie 2

(1) - $\forall t \geq 0$, $(1+t)^3 \geq 0$ et donc $f(t) \geq 0$

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$

- $t \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty ; 0[$
- $t \mapsto (1+t)^3$ est continue sur $[0 ; +\infty[$ (en tant que fonction polynomiale
- Ainsi $t \mapsto \frac{2}{(1+t)^3}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

- On a immédiatement $\int_{-\infty}^{0} f(t) = 0$

- Soit $X > 0$, $\int_0^X f(t)\,dt = \int_0^X \frac{2}{(1+t)^3}\,dt$

$$= \left[-\frac{1}{(1+t)^2}\right]_0^X$$

$$\int_0^X f(t)\,dt = 1 - \frac{1}{(1+X)^2} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 1$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)$ converge et vaut 1.

f est une densité d'une variable aléatoire Z

(2) Si $x < 0$

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$$

Si $x \geq 0$

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{2}{(1+t)^3}\,dt$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{(d'après 1)}$$

En conclusion

$$\boxed{\begin{cases} F_Z(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F_Z(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

(3) La fonction $t \longmapsto \frac{2t}{(1+t)^3}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

$\forall t > 1 \quad (1+t)^3 \geq t^3$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+t)^3} \leq \frac{1}{t^3}$$

$$\Rightarrow \frac{2t}{(1+t)^3} \leq \frac{2}{t^2}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2}\,dt$ est convergente (Intégrale de Riemann)

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3}\,dt$ est convergente, de même que $\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3}\,dt$.

$\underline{\text{Soit } X>0}$

$$\int_0^X \frac{2t}{(1+t)^3}\,dt = \int_1^{X+1} \frac{2(u-1)}{u^3}\,du$$

$u = t+1$
$du = dt$

$$= \int_1^{X+1} \frac{2}{u^2}\,du - \int_1^{X+1} \frac{2}{u^3}\,du$$

$$= \left[-\frac{2}{u}\right]_1^{X+1} - \left[-\frac{1}{u^2}\right]_1^{X+1}$$

$$= -\frac{2}{X+1} + 2 - \left(1 - \frac{1}{(X+1)^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{2}{(X+1)} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 1$$

Donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3}\,dt = 1}$

(4) On a $\int_{-\infty}^{0} t\,f(t)\,dt = 0$

et $\int_0^{+\infty} t\,f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3}\,dt = 1.$

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,dt$ est absolument convergente et

$\boxed{E(Z) = 1}.$

(5) (a) $p(C) = p(Z_2 \geq 2) = 1 - p(Z_2 < 2)$

$= 1 - F_Z(2)$

$= 1 - \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)$

$\boxed{p(C) = \frac{1}{9}}$

$p(D) = p(Z_2 \leq 3) = F_2(3)$

$= 1 - \frac{1}{4^2}$

$\boxed{p(D) = \frac{15}{16}}$

On a alors

$$p_C(D) = \frac{p(C\cap D)}{p(C)}$$

Or $p(C\cap D) = p(Z_2 \geq 2 \cap Z_2 \leq 3)$

$= p(2 \leq Z_2 \leq 3)$

$= F_Z(3) - F_Z(2)$

$= \frac{15}{16} - \frac{8}{9}$

$= \frac{135 - 128}{16\times 9}$

$= \frac{7}{16\times 9}$

Ainsi $\boxed{p_C(D) = \frac{7}{16}}$

(b) (i) On a $(T \leq x) = \max(Z_1, Z_2) \leq x$

$$= (Z_1 \leq x) \cap (Z_2 \leq x)$$

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$G_T(x) = P(T \leq x)$$

$$G_T(x) = P(\text{"}Z_1 \leq x\text{"} \cap \text{"}Z_2 \leq x\text{"})$$

Les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont indépendante

$$G_T(x) = P(Z_1 \leq x) \times P(Z_2 \leq x)$$

$$= F_Z(x) \times F_Z(x)$$

$$\boxed{G_T(x) = (F_Z(x))^2}$$

(c) Ainsi $\forall x < 0$, $G_T(x) = 0$

et $\forall x \geq 0$, $G_T(x) = \left(1 - \frac{1}{(1+x)^2}\right)^2$

G_T est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ayant pour densité

$$\boxed{\begin{array}{ll} g(x) = 0 & \text{pour } x < 0 \\ g(x) = 2 \times \frac{2}{(1+x)^3}\left(1 - \frac{1}{(1+x)^2}\right) & \text{pour } x \geq 0 \end{array}}$$

Exercice 3 - Partie 3

① $v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2e^{-2x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$ $\quad w(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

② $S = M + N$

On a alors $E(S) = E(M) + E(N)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$E(S) = 1$$

Le temps moyen de fabrication d'une pièce est 1 minute.

Exercice 4

(1) Soit $x \geq 2$

D'une part $x^2 - 1 \leq x^2$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-1} \leq \sqrt{x^2} \qquad (\text{on a } \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \geq \frac{1}{|x|} \qquad \text{et } |x| = x \text{ car } x>0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \geq \frac{1}{x}.$$

On a d'autre part $x^2 \geq x$

$$\Rightarrow x^2 - 1 \geq x - 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-1} \geq \sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

On a alors

$$\boxed{\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}}$$

(2) (a) $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(x)\Big]_2^n = \ln(n) - \ln(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$

Ainsi $I_n \geq \ln(n) - \ln(2)$

Par comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty}$

(b) $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ et $F'(x) = \dfrac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \times \frac{2x + 2\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= f(x)$$

Ainsi $I_n = \displaystyle\int_2^n f(x)\,dx = F(n) - F(2) = \ln\left(n + \sqrt{n^2-1}\right) - \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

(c) $$I_n - \ln(n) = \ln\left(n + \sqrt{n^2-1}\right) - \ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \ln(n)$$
$$= \ln\left(1 + \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\right) - \ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = 1$$

Ainsi $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n - \ln(n) = \ln(2) - \ln(2+\sqrt{3}) = \ln\left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right).}$$

③ $$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$

(a) Pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, pour tout $x \in [k;k+1]$.

$$k+1 \geq x \geq k$$
$$\sqrt{(k+1)^2-1} \geq \sqrt{x^2-1} \geq \sqrt{k^2-1}$$
$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)^2-1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$
| Inégalité de la moyenne

(b) et $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2-1}} \leq \int_2^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2-1}} \leq I_{n+1} \leq S_n$$

On a alors $$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2-1}} \leq I_n$$

et $$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2-1}} = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} = S_n - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ainsi | $S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}$

En assemblant les inégalités $\boxed{I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}}$

(c)

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_n - \ln(n)}{\ln(n)} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n - \ln(n) = \ln\left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\ln(n)} = 1$

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{\ln(n+1)} = 1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{\ln(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{\ln(n+1)} \times \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$.

Enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n + 1/\sqrt{3}}{\ln(n)} = 1$.

En utilisant le théorème des gendarmes, on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1}$$